

(۱) مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که تابع روبرو در $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} & x > 0 \\ a + |x - 1| & x = 0 \\ [2x] + b & x < 0 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2 \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2} |\sin x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2} \sin x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [2x] + b = [-] + b = -1 + b \Rightarrow -1 + b = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

(۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \left[\frac{1}{1 - \cos x} \right]$ را بیابید.

حل: با توجه به رابطه $t - 1 \leq [t] \leq t$ داریم.

$$\frac{1}{1 - \cos x} - 1 \leq \left[\frac{1}{1 - \cos x} \right] \leq \frac{1}{1 - \cos x} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - \sin^2 x \leq \sin^2 x \left[\frac{1}{1 - \cos x} \right] \leq \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} - \sin^2 x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} - \sin^2 x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \cos x - \sin^2 x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \left[\frac{1}{1 - \cos x} \right] = 2$$

(۳) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \sin\left(\pi \sqrt{\frac{x^2 + 5}{4}}\right)$ را بیابید؟

حل:

$$\sin(\lim_{x \rightarrow 2} \pi \sqrt{\frac{x^2 + 5}{4}}) = \sin(\pi \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{4}}) = \sin(\pi \sqrt{\frac{4 + 5}{4}}) = \sin(\frac{3}{2} \pi) = -1$$

(۴) تابع $y = [x^2]$ در فاصله $[-1, 2]$ چند نقطه ی ناپیوستگی دارد؟

$$x = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \rightarrow [x^2] = 1 \rightarrow y = 1$$

$$-1 < x < 1 \rightarrow 0 \leq x^2 < 1 \rightarrow [x^2] = 0 \rightarrow y = 0$$

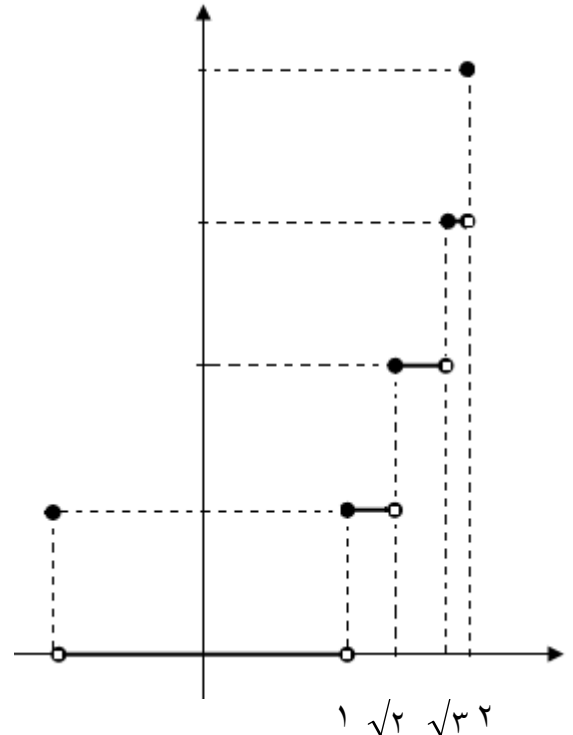
$$1 \leq x < \sqrt{2} \rightarrow 1 \leq x^2 < 2 \rightarrow [x^2] = 1 \rightarrow y = 1$$

$$\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \rightarrow 2 \leq x^2 < 3 \rightarrow [x^2] = 2 \rightarrow y = 2$$

$$\sqrt{3} \leq x < 2 \Rightarrow 3 \leq x^2 < 4 \rightarrow [x^2] = 3 \rightarrow y = 3$$

$$x = 2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow [x^2] = 4 \rightarrow y = 4$$

(۵ نقطه ناپیوستگی دارد: $2, \sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, 0$)



(۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow n} \frac{x}{[x] + [-x] + 2}$ را بیابید؟

حل:

$$[-x] = \begin{cases} -[x], & x \in \mathbb{Z} \\ -1 - [x], & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

وقتی $x \rightarrow n$ مقدار x هیچ وقت برابر n نمی شود، بنابراین $x \notin \mathbb{Z}$ و $[x] + [-x] = -1$ می شود. پس

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow n} \frac{x}{-1 + 2} = \lim_{x \rightarrow n} x = n$$

(۶) a, b را چنان بیابید تا تابع f روی R پیوسته باشد؟

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x - b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل :

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} 2\sin x = -2 \quad \Rightarrow -a - b = -2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} a\sin x - b = -a - b$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} a\sin x - b = a - b$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0 \quad \Rightarrow a - b = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\begin{cases} -a - b = -2 \\ a - b = 0 \end{cases} \rightarrow -2b = -2 \rightarrow b = 1, \quad a = 1$$

(7) حدهای زیر را بدست آورید

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} =$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(1 - \cos x + \cos^2 x)} = \frac{1 + 1}{1 + 1 + 1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} =$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{2}{3}$$

(۸) حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{x}$$

حل: فرض می کنیم $\sqrt[5]{1+2x} = t$ بنابراین $x = \frac{t^5 - 1}{2}$.

اگر $x \rightarrow 0$ آنگاه $t \rightarrow 1$. خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+2x} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{\frac{t^5 - 1}{2}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2(t-1)}{(t-1)(t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)} = \frac{2}{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} a[x] + b[-x] & x > 2 \\ 2a + 3 & x = 2 \\ \left[\frac{x}{2} \right] - 2b & x < 2 \end{cases} \quad (9) \quad a, b \text{ را طوری به دست آورید که تابع } x = 2 \text{ پیوسته باشد.}$$

باشد.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \rightarrow a[2^+] + b[-(2)^+] = \left[\frac{(2)^-}{2} \right] - 2b = 2a + 3$$

$$2a - 2b = -2b = 2a + 3 \rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = 2a + 3 \rightarrow b = -1 \rightarrow 2a + 3 = 2 \rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(10) \text{ مقدار } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} \text{ را بدست آورید}$$

حل:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n+2} - \frac{n}{2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - n(n+2)}{2(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n+4} = -\frac{1}{2}$$

(۱۱) اگر $f(x) = \frac{-x}{x+5}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ f)(x)$ را بدست آورید .

حل :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-x}{x+5}}{\frac{-x}{x+5} + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{4x+25} = \frac{-1}{4}$$

(۱۲) در تابع $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] + a & x < 1 \\ 2x + b + 2 & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x > 2 \end{cases}$ ، a, b را طوری بدست آورید که تابع در $x = 2$

و $x = 1$ پیوسته باشد .

حل :

$$x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \rightarrow$$

$$2 + b + 2 = [1^+] + [-1^+] + a \rightarrow 4 + b = 1 - 2 + a \rightarrow a - b = 5$$

$$x = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \rightarrow$$

$$4 + b + 2 = 2 + 2 \rightarrow b = -2 \rightarrow a + 2 = 5 \rightarrow a = 3$$

(۱۳) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه داده شده روی R پیوسته باشد .

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ ax + b & 1 < x < 4 \\ -2x & 4 \leq x \end{cases}$$

حل :

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow 1 = a + b \quad (1)$$

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \rightarrow 4a + b = -8 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + b = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - b = -1 \\ 4a + b = -8 \end{cases} \rightarrow 3a = -9 \rightarrow a = -3 \rightarrow -3 + b = 1 \rightarrow b = 4$$

(۱۴) حدود زیر را محاسبه کنید .

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 + 3x^2 - 7}{x^3 - 1}$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 + 3x^2 - 7}{x^3 - 1} = \frac{4 + 3 - 7}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\text{رفع ابهام} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 + 3x^2 - 7}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x^2 + 7x + 7)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{4 + 7 + 7}{1 + 1 + 1} = 6$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \frac{\sin 0}{\sqrt{1 - \cos 0}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\text{رفع ابهام} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{2} |\sin x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{-\sqrt{2} \sin x} = \frac{2}{-\sqrt{2}}$$

(۱۵) تابع f در $x = 3$ پیوسته است. $a + b$ را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3} + ax + 5 & x < 3 \\ 2 & x = 3 \\ \frac{2x - 6}{x^2 - 5x + 6} + bx & x > 3 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -|x + 3| + ax + 5 & x < 3 \\ 2 & x = 3 \\ \frac{2}{x - 2} + bx & x > 3 \end{cases}$$

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

$$2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x - 2} + bx = \lim_{x \rightarrow 3^-} -|x + 3| + ax + 5$$

$$2 = 2 + 3b = -6 + 3a + 5 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 1 \end{cases} \rightarrow a + b = 1$$

(۱۶) حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^-} \frac{1 - \cos x}{[\sin x]} = \frac{1 - \cos \frac{3\pi}{2}}{[-1^+]} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$$

$$x > 0: -1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \rightarrow -x \leq x \cos \frac{1}{x} \leq x \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (-x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \rightarrow$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \leq 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$$

برای $x < 0$ با تغییر جهت نامساوی همین نتیجه به دست می آید.

(۱۷) a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| + b & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ 2[x] + a & x > 1 \end{cases}$$

حل:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \rightarrow 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2[x] + a) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (|x-1| + b)$$

$$2 = 2 + a = b \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

(۱۸) حد تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1-x^2}{1+x^2} \right]$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1+x^2} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left[\frac{1}{1+x^2} \right] - 1 \right)$$

$$0 < \frac{1}{1+x^2} < 1 \rightarrow \left[\frac{1}{1+x^2} \right] = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (0 - 1) = -1$$

(۱۹) حد $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{[\cos x]}{x}$ را بیابید.

حل:

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \rightarrow 0 \leq \cos x < 1 \rightarrow [\cos x] = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{[\cos x]}{x} = 0$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+ \rightarrow -1 \leq \cos x < 0 \rightarrow [\cos x] = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-1}{x} = \frac{-2}{\pi}$$

لذا تابع در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ حد ندارد.

(۲۰) اگر $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + b) \sin \frac{1}{x-1} = 0$ باشد، مقدار b را بیابید.

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + b) \sin \frac{1}{x-1} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + b) = 0 \rightarrow 1 + 1 + b = 0 \rightarrow b = -2$$

$$(21) \text{ تابع با ضابطه ی } f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x > a \\ \frac{bx + 2}{x} & x < a \\ \wedge & x = a \end{cases}$$

در $x = a$ پیوسته است. b, a را بیابید.

حل :

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \rightarrow \wedge = a^2 + a^2 = \frac{ba + 2}{a} \rightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 = 2 \rightarrow a = \pm\sqrt{2} \\ ba + 2 = \wedge a \rightarrow \begin{cases} a = 2 \rightarrow 2b + 2 = 16 \rightarrow b = 7 \\ a = -2 \rightarrow -2b + 2 = -16 \rightarrow b = 9 \end{cases} \end{cases}$$

(22) تابع f به ازای هر x, y حقیقی در رابطه ی $f(x+y) = f(x) + f(y)$ صدق می کند اگر در $x = 0$ پیوسته باشد ثابت کنید در R پیوسته است.

حل :

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \rightarrow f(0) = 0$$

تابع f در $x = 0$ پیوسته است بنابراین $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

(اگر تابع f در نقطه $x = x_0$ پیوسته باشد آنگاه $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0) + f(h)) = f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(x_0) + f(0) = f(x_0) + 0 = f(x_0)$$

تابع f در هر نقطه $x = x_0$ پیوسته می باشد پس در R پیوسته است.

(23) حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + [x]}{2x^2 + 5[x+1]}$$

حل :

$$x \rightarrow 1^+ \rightarrow x > 1 \rightarrow [x] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + [x]}{2x^2 + 5[x+1]} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 5 + 1} = \frac{1 + 1}{2 + 6} = \frac{1}{4}$$

(۲۴) حد راست و حد چپ تابع $f(x) = \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 4}$ را در نقطه $x=2$ بیابید و تعیین کنید آیا تابع f در

$x=2$ حد دارد؟

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 4} = \frac{[(2^+)^2] - [2^+]^2}{(2^+)^2} = \frac{4 - 4}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 4} = \frac{[(2^-)^2] - [2^-]^2}{(2^-)^2 - 4} = \frac{3 - 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

تابع f در این نقطه حد ندارد.

(۲۵) اگر $f(x) = x^2 + |x| - 2$ باشد آنگاه مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را حساب کنید.

حل :

$$t = 3x^2 - 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{t+1}{3}} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{t+1}{3}} \rightarrow f(t) = \frac{t+1}{3} + \sqrt{\frac{t+1}{3}} - 2 & (1) \\ x = -\sqrt{\frac{t+1}{3}} \rightarrow f(t) = \frac{t+1}{3} - \sqrt{\frac{t+1}{3}} - 2 & (2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 1 + 1 - 2 = 0 \\ (2) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= 1 + 1 - 2 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

(۲۶) مقادیر a, b را طوری بدست آورید که تابع $f(x)$ در نقطه $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-2\cos x}} & x > 0 \\ a & x = 0 \\ [x] + b & x < 0 \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{شرط پیوستگی}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + b) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-2\cos x}} = a \rightarrow [0^-] + b = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{4\sin^2(\frac{x}{2})}} = a \rightarrow$$

$$-1 + b = 2 = a \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

(۲۷) نشان دهید به ازای هیچ مقداری از a, b تابع زیر پیوسته نخواهد شد.

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x + bx + a + 1 & x < 0 \\ & x = 0 \\ b \sin x + a & x > 0 \end{cases}$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a \sin x + bx + a + 1) = a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (b \sin x + a) = a$$

$$f(0) = 1$$

این تساوی همزمان برای هیچ مقداری از a برقرار نمی باشد $\Rightarrow a + 1 = a = 1$

(۲۸) در تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ حاصل، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ چقدر است؟

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x(x^2 - 1)) = f(0^- \times (-1)) = f(0^+) = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$$

(۲۹) پیوستگی تابع $f(x) = x[\sin x]$ را در $x = -\frac{\pi}{2}$ بررسی کنید .

حل :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} x[\sin x] = -\frac{\pi}{2}[-1^+] = \left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} x[\sin x] = -\frac{\pi}{2}(-1^+) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2}\right)\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \left(-\frac{\pi}{2}\right)(-1) = \frac{\pi}{2}$$

تابع در $x = -\frac{\pi}{2}$ پیوسته است .

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x > 0 \\ \sqrt{1 - \cos 2x} & x = 0 \\ a & \text{اگر } f \text{ با ضابطه } x = 0 \\ [x] + b & x < 0 \end{cases} \quad (30)$$

مقادیر b, a را

محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2 \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2} |\sin x|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + b = -1 + b$$

$$-1 + b = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad f(0) = a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(۳۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{1-x} = -(1+1+1)(1+1) = -6$$

(۳۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - x}{x + \sqrt[3]{x}}$ را حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - x}{x + \sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}(1 - \sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{1 - 0}{0 + 1} = 1$$

(۳۳) آیا تابع زیر در $x=1$ پیوسته است؟

$$f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

حل:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) &= -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Arc tan}\left(\frac{x}{1-x^2}\right) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود ندارد} \rightarrow x=1 \text{ پیوسته نیست}$$

$$f(1) = \text{Arc tan}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$$

(۳۴) نشان دهید $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

حل:

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(۳۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|[x]}{|x|-2}$ را بیابید.

حل :

$$2 < x < 3 \Rightarrow [x] = 2, |2-x| = x-2, |x| = x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(2)}{x-2} = 2$$

(۳۶) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ را محاسبه نمایید.

حل :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}^-} \frac{1}{\tan x} = -1$$

(۳۷) a, b را چنان بیابید که تابع $f(x)$ در نقطه‌ی ۲ و -۲ حد داشته باشید.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x < -2 \\ 2ax^2 + bx + 1 & -2 \leq x \leq 2 \\ 3ax - 2 & x > 2 \end{cases}$$

حل :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} 3ax - 2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2ax^2 - bx + 1 &\Rightarrow 2a + 2b = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} 2ax^2 + bx + 1 = \lim_{x \rightarrow -2^-} ax + b &\Rightarrow 10a - 2b = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = -\frac{11}{26}, b = \frac{14}{13}$$

(۳۸) a, b را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x > 1 \\ 4 & x = 1 \\ x^2 + 2ax - 3b & x < 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته باشد.

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} a x^2 + b x = 4 \Rightarrow a + b = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2ax - 3b = 4 \Rightarrow 2a - 3b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 3, b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) \text{ . مطلوب است . } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 1 \\ \cos \frac{\pi x}{2} & x < 1 \end{cases} \quad (39) \text{ تابع}$$

حل :

$$x > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{x}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \cos \frac{\pi}{2x} = 0$$

(40) حدود زیر را محاسبه کنید .

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 15}{3x^2 - 5x - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(2x-5)}{(x-3)(3x+4)} = \frac{1}{13}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x] - 1}{\left[\sin \frac{\pi}{2} x\right]} = \frac{[1^+] - 1}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^+\right]} = \frac{0}{1} = 0$$

(41) حد بگیرد:

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 7} - \sqrt{x^2 + 5x}$$

حل :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 7} - \sqrt{x^2 + 5x})(\sqrt{x^2 - 3x + 7} + \sqrt{x^2 + 5x})}{\sqrt{x^2 - 3x + 7} + \sqrt{x^2 + 5x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 7 - x^2 - 5x}{\sqrt{x^2 - 3x + 7} + \sqrt{x^2 + 5x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x + 7}{|x| + |x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8x}{2x} = -4 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \cot \pi x$$

حل :

$$\lim_{t \rightarrow 0} t(t+2) \cot \pi t = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(x+1) \cot \pi x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} t(t+2) \cot \pi(t+1)$$

$$\left| \begin{array}{l} x \rightarrow 1 \\ x-1=t \end{array} \right. = \lim_{t \rightarrow 0} t(t+2) \cot \pi t = \frac{2}{\pi}$$

$$\left| \begin{array}{l} t \rightarrow 0 \\ x=t+1 \end{array} \right.$$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]+x}{[x]-x}$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]+x}{[x]-x} = \frac{2+2}{2-2} = \frac{4}{0} = -\infty$$

۴۲) مقدار k را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan kx}{\cos kx \cdot \sin 3x} = 5$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx}{\cos 0 \times 3x} = 5 \Rightarrow \frac{k}{3} = 5 \rightarrow k = 15$$

۴۳) حد بگیرد.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x - 1) \tan x$

حل) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}} \times \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2-1)(1+\sqrt{x})}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{-1} = -4$

الف

حل ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -(\sin x - 1) \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -(\sin x - 1) \times \frac{1}{\cot x} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cot x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x}$

$$= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cot x (1 + \sin x)} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\frac{\cos x}{\sin x} (1 + \sin x)} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin x} = - \frac{1 \times 0}{2} = 0$$

۴۴) اگر داشته باشیم: $(x+2)^2 \leq |g(x)-2| \leq (x+2)^2$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$-(x+2)^2 \leq g(x)-2 \leq (x+2)^2 \quad 2-(x+2)^2 \leq g(x) \leq (x+2)^2 + 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2} 2 - (x+2)^2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2} 2 + (x+2)^2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 2$$

۴۵) آیا تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ پیوسته است؟

حل:

$$f(1) = 1 \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{حد ندارد} \rightarrow \text{پیوسته نیست}$$

۴۶) اگر شعاع همسایگی متقارن محذوف $(-2a+1, -b) \cup (-b, 2a-3)$ برابر $\frac{5}{2}$ باشد، مقدار شعاع

همسایگی $|2x-1| < a - \frac{1}{4}$ را بیابید.

حل:

$$-b + 2a - 1 = 2a - 3 + b \Rightarrow b = 1$$

$$2a - 3 + 2a - 1 = 2 \times \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{4}$$

$$a - \frac{1}{4} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2 \text{ شعاع همسایگی دوم}$$

۴۷) حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ ب: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{[x-1]}$

(حل الف)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \times \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - 2^2}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

(حل ب)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{[x-1]} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 1}{[x]+(-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(-1)^2 + 1}{(-1) + (-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{[x]+(-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(-1)^2 + 1}{(-2) + (-1)} = \frac{-2}{3}$$

چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند ، بنابراین حد ندارد.

(۴۸) حدود زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{[x-1]}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\tan x}$

(حل الف)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{[x]-1} = \frac{+1+1}{-1-1} = \frac{2}{-2} = -1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{[x]-1} = \frac{+1+1}{-2+1} = \frac{2}{-3}$$

حد چپ و راست برابر نیست پس حد ندارد .

(حل ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}(-\sin x)}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\sqrt{2} \cos x = -\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin^2 x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{\tan x} =$$

(۴۹) پیوستگی تابع f را در $x=0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x + |x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

حل :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x+x} & x > 0 \\ \frac{\sin x}{2x-x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{3x} & x > 0 \\ \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} \quad L_1 \neq L_2 \Rightarrow \text{حد ندارد و پیوسته نیست}$$

(۵۰) حد $x \left[\frac{1}{x} \right]$ را در صفر بدست آورید.

حل: از آنجا که $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$ برای مقادیر مثبت x داریم $1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$ و

برای مقادیر منفی x داریم $1 \leq x \left[\frac{1}{x} \right] < 1 - x$. توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در صفر حد یکسان دارند پس طبق قضیه فشردگی $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$.

(۵۱) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2a & x > 1 \\ 2bx^2 + a & x < 1 \end{cases}$ اگر $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ آنگاه مقدار $a+b$ را بدست

آورید.

حل:

$$1 - 2a = 2(2b + a) \rightarrow 4b + 4a = 1 \rightarrow a + b = \frac{1}{4}$$

(۵۲) تابع $f(x) = (x^2 - 4)[x]$ در مجموعه ی اعداد صحیح در کدام نقاط پیوسته است؟

حل: می دانیم $[x]$ در تمام نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است و چون $(x^2 - 4)$ در نقاط $x = 2$ و

$x = -2$ پیوسته و برابر صفر است پس تابع $f(x) = (x^2 - 4)[x]$ در مجموعه ی اعداد صحیح در

نقاط $x = 2$ و $x = -2$ پیوسته است.

(۵۳) مقادیر a, b را چنان بیابید که تابع روبرو در $x = 4$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 16|}{x - 4} + b, & x > 4 \\ 3, & x = 4 \\ [-x] + a, & x < 4 \end{cases}$$

حل :

$$f(4) = 3$$

$$3 = -4 + a = 4 + 4 + b \Rightarrow a = 7, b = -5$$

(۵۴) حدود زیر را در صورت وجود، تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} \quad (\text{الف})$$

(حل الف)

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{2} |\cos \frac{x}{2}|}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

(حل ب)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

پس این حد موجود نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-x} = -1$$

$$x = 2 \text{ در } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2+x} - x}{ax - 2a} & x \neq 2 \\ x + 1 & x = 2 \end{cases}$$

(۵۵) مقدار a را طوری به دست آورید که تابع

پیوسته باشد.

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - x}{ax - 2a} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - x}{ax - 2a} \times \frac{\sqrt{2+x} + x}{\sqrt{2+x} + x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + x + 2}{(ax - 2a)(\sqrt{2+x} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(-x+2)}{-a(-x+2)(\sqrt{2+x} + x)} = \frac{-3}{4a}$$

$$\frac{-3}{4a} = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \text{ پس } f(2) = 3 \text{ از طرفی}$$

(۵۶) حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید :

الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} - \sqrt{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin^{-1} x$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+7} - 4}{9 - x^2}$

حل الف) تابع در صفر حد ندارد

$$x \rightarrow 0^+ \rightarrow 0 < x < 1 \rightarrow x < \sqrt{x} \rightarrow x - \sqrt{x} < 0 \rightarrow$$

حل ب) مطابق قرارداد کتاب چون تابع در همسایگی چپ ۱ تعریف شده پس جواب حد $\frac{\pi}{2}$ است.

ج)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x+7} - 4}{9 - x^2} \times \frac{\sqrt{3x+7} + 4}{\sqrt{3x+7} + 4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-3)}{(3-x)(3+x)(\sqrt{3x+7} + 4)} = \frac{-3}{48} = \frac{-1}{16}$$

(۵۷) حد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2}$ را حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1 + 1 = 2$$

(۵۸) اگر فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + ax + b} = 2$ مقدار a, b را بدست آورید.

حل: چون $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 6x + 5) = 0$ پس باید حد مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 1$ صفر شود.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -a - 1$$

$$x^2 + ax + b = x^2 + ax - a - 1 = (x-1)(x+1) + a(x-1) = (x-1)(x+1+a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1+a)} = \frac{-4}{1+1+a} = 2 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow b = 4 - 1 = 3$$

(۵۹) تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x]^2 - [x]$ روی بازه $(-1, 2)$ چند تاست؟

حل: در بازه $(-1, 2)$ تنها باید نقاط $x = 0$ و $x = 1$ را بررسی کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} ([x]^2 - [x]) = 0 - 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= (-1)^2 - (-1) = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f \text{ در صفر پیوسته نیست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 - 0 = 0, \quad f(1) = 0$$

پس f در 1 پیوسته است.

۶۰) تابع f با ضابطه $f(x) = -2[n] - [-n]$ مفروض است حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

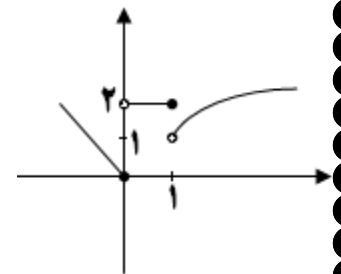
الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -2(1) - (-2) = -2 + 2 = 0$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2(2) - (-3) = -4 + 3 = -1$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ حد ندارد

۶۱) نمودار تابع زیر را رسم کرده و پیوستگی تابع را در نقطه $x=0$ و $x=1$ را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x} & x > 1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \quad f(0) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow$ تابع در نقطه $x=0$ پیوستگی ندارد

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad f(1) = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow$ تابع در نقطه $x=1$ پیوستگی ندارد.

۶۲) حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x$

حل :

$$x - \frac{\pi}{2} = \theta \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \theta \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} -\theta \cot \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\theta}{\tan \theta} = -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 4x}}{\tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin 2x| \sqrt{2}}{\tan 5x} = \frac{-2\sqrt{2}}{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} [\sin x + \cos x] + a & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ [-\cos x] & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{تابع (۶۳)}$$

طوری که f در $\frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد.

حل :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} [\sin x + \cos x] + a = 1 + a = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} [-\cos x] = -1$$

بنابراین $a = -2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} & , x < 0 \\ a & , x = 0 \\ [x] + b & , x > 0 \end{cases} \quad \text{(۶۴) اگر تابع}$$

در نقطه صفر پیوسته باشد a و b را بیابید ؟

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|\sin x| \sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ([x] + b) = b \Rightarrow a = b = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

(۶۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 - \sin \frac{1}{x}\right)$ را بیابید؟

حل:

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \sin \frac{1}{x} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2 \left(1 - \sin \frac{1}{x}\right) \leq 2x^2$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 - \sin \frac{1}{x}\right) = 0$$

(۶۶) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} = \frac{[3^-] - 3}{3^- - 3} = \frac{2 - 3}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

(۶۷) حدود a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + a & x \geq 1 \\ x^2 + 3x & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته نباشد.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 + a \end{array} \right\} \rightarrow -2 + a \neq 4 \rightarrow a \neq 6$$

(۶۸) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + 1 & x > -2 \\ 13 & x = -2 \\ 2ax^2 + bx - 1 & x < -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد مقدار $2a - b$ را

بیابید

حل:

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2a + 1 = 13 \rightarrow -2a = 12 \rightarrow a = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 8a - 2b - 1 = 13 \rightarrow -48 - 2b - 1 = 13 \rightarrow b = -31$$

$$2a - b = 2(-6) - (-31) = -12 + 31 = 19$$

(۶۹) حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} ([\sin x] + [\cos x])$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x^2 - 5x + 3}{(x-1)^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

حل الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} ([\sin x] + [\cos x]) = \left[\sin \frac{\pi}{2} \right] + \left[\cos \frac{\pi}{2} \right] = 0 - 1 = -1$

حل ب) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x^2 - 5x + 3}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+3)(x-1)^2}{(x-1)^2} = 4$

حل ج) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \sqrt{4} + 2 = 4$

(۷۰) اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$ مطلوب است محاسبه:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{\tan x}{x}\right)$

حل: اگر $x < 0$ باشد داریم:

$x < 0 \rightarrow \sin x > x > \tan x \rightarrow \sin x > x \rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1^2 + 1 = 2$

اگر $x > 0$ باشد داریم:

$x > 0 \rightarrow \sin x < x < \tan x \rightarrow \tan x > x \rightarrow \frac{\tan x}{x} > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{\tan x}{x}\right) = 1^2 - 1 = 0$

پس:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{\tan x}{x}\right) = 2 + 0 = 2$

(۷۱) حدتابع مقابل را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2 + x}} = ?$$

حل :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x^2 + 1})}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x + 1}} = \frac{1}{1} = 1$$

(۷۲) هریک از حدهای زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^3 x}{1 - \cos 2x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] + |x|}{x + 1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{X^2 - 4X + 3}{X^2 - 3X + 2}$

حل الف :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^3 x}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin^3 x}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{\sin^3 x}{\sin x} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{\sin^3 x}{x} \right) = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$$

حل ب :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] + |x|}{x + 1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \begin{array}{l} x > 0 \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0 + x}{x + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0 \end{array} \\ \begin{array}{l} x < 0 \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 - x}{x + 1} = \frac{-1 - 0}{0 + 1} = -1 \end{array} \end{array} \right\}$$

حد چپ و راست با هم برابر نیست بنابراین حد ندارد.

حل ج :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)^2 (x + 2)} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

(۷۳) الف) حد روبرو را پیدا کنید :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} ([\sin x] + [(\cos x)])$$

ب) با استفاده از قضیه فشردگی حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$ را بدست آورید.

حل الف)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= [\cdot^-] + [\cdot^-] = 0 - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= [\cdot^-] + [0^+] = 0 - 0 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{پس این حد وجود ندارد}$$

(حل ب)

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \quad \text{طبق فشردگی}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} & x < 0 \\ a & x = 0 \\ [x] + b & x > 0 \end{cases} \quad \text{اگر تابع (۷۴)}$$

در $x = 0$ پیوسته باشد مقادیر a, b را مشخص کنید.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b = f(0) = a = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{2} |\sin x|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{در } f(x) = \begin{cases} [x] + 2a - b & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x + b \frac{x^2 - 2x + 1}{2(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad \text{(۷۵) مقادیر } a, b \text{ را طوری بیابید که تابع } f \text{ با ضابطه } x=1$$

نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{حل: باید}$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = [1^-] + 2a - b = 2a - b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + b \frac{|x-1|}{x-1} \right) = 1 + b$$

$$1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$2a - b = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

(۷۶) مقدار a را چنان بیابید که تابع f با ضابطه $y = a[x] + [x+1]$ در نقطه $x = -1$ حد داشته باشد.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} a[x] + [x+1] = -2a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} a[x] + [x+1] = -a$$

$$\Rightarrow -a = -2a - 1 \Rightarrow a = -1$$

$$(۷۷) \text{ تابع } f \text{ با ضابطه } y = \begin{cases} a[4x] - b & x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ a \sin \frac{\pi}{2} x + b & x > 1 \end{cases}$$

فروض است ضرایب a, b را چنان بیابید که تابع f در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$a[4 \times 1^-] - b = a(\sin \frac{\pi}{2} \times 1) + b = 1$$

$$3a - b = a + b = 1$$

$$\begin{cases} 3a - b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(۷۸) \text{ در تابع } f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & |x| < 2 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 1} & |x| \geq 2 \end{cases} \text{ را چنان بیابید که تابع روی } \mathbb{R} \text{ پیوسته گردد.}$$

حل: برای وجود پیوستگی روی \mathbb{R} باید تابع در $x = -2, x = 2$ پیوسته گردد لذا:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} ax^2 + bx + 1 = \sqrt{2^2 - 2(2) + 1} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - 2x + 1} \rightarrow 4a + 2b + 1 = 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(-2)^2 - 2(-2) + 1} = \lim_{x \rightarrow -2^-} ax^2 + bx + 1$$

$$\rightarrow 3 = 3 = 4a - 2b + 1$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 4a - 2b = 2 \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$$

۷۹) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan 2x + x^2}{x - x^2}$ را تعیین کنید

حل :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan 2x + x^2}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x + x^2}{x - x^2} = 3$$

۸۰) حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{3x - 2})(x + \sqrt{3x - 2})}{(x - 1)(x + 1)(x + \sqrt{3x - 2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)(x + 1)(x + \sqrt{3x - 2})}$$

الف) $x \rightarrow 1$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 1)(x + \sqrt{3x - 2})} = \frac{-1}{4}$$

ب) $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2} |\sin x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin x \cos x}{-\sqrt{2} \sin x}$$

ج) $x \rightarrow 3^+$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 3}{x^2 - 9} = 0$$

د) $x \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sin(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1) \sin(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(\sqrt{x} + 1) \sin(x - 1)} = \frac{1}{2}$$

۸۱) تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & |x| < 2 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 1}, & |x| \geq 2 \end{cases}$ داده شده است. مقادیر a و b را طوری بدست آورید که تابع روی R پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 4a + 2b + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \Rightarrow 4a - 2b + 1 = 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$